

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
«Ο ΘΑΛΗΣ»**

**ΘΕΜΑΤΑ 2006-2016
Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

www.pe03.gr

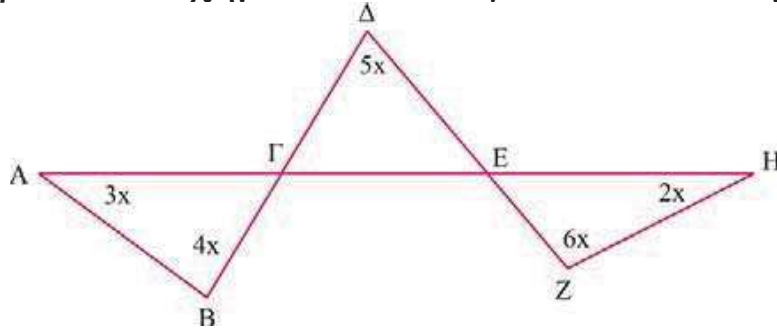
Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
Φθιώτιδας και Ευρυτανίας
www.pe03.gr



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ' τάξη Γυμνασίου

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



2. Αν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και $\alpha\beta\gamma=10$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

3. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $27p + 1$ είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2} a \beta^{-1} + \frac{10}{3} a^{-1} \beta = 3.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”

ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad B = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)].$$

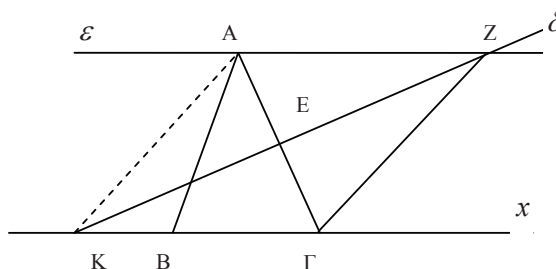
Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $A > B$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{Z\Gamma x}$,

(β) Να αποδείξετε ότι $KA = AZ$.



Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $A = aaabb$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

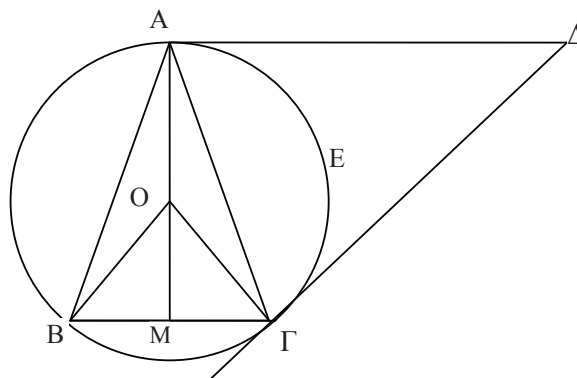
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$. Η $A\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη προς την $O\Gamma$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $OAE\Gamma$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = a$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = a$.

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{[1 - (-1)^{2009}]^0}$, $B = \frac{[(-2)^2 + (-1)^2]^2}{5} + \frac{x}{2}$.

Αν είναι $A = B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x .

Μονάδες 5

2. Το σημείο $A(-\lambda + 2, 4\lambda - 1)$, όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy . Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ ,

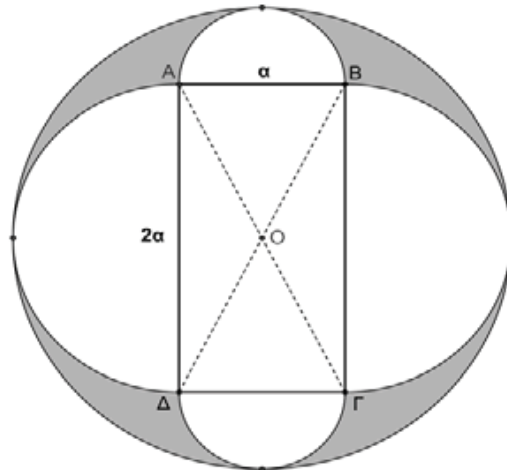
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OA και

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $OBA\Gamma$, όπου B, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο A στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy , αντίστοιχα.

Μονάδες 5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = \alpha$, $A\Delta = 2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής O των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Μονάδες 5



4. Αν ισχύει $\frac{45^v \cdot 2^{2v}}{6^v} = 900$, όπου v θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2003 \cdot (-1)^v - (-1)^{v+1} + 4 \cdot (-1)^{v+2}.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν v είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 4 \cdot (-1)^v + 2 \cdot \frac{(-1)^{2v+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3v}}{5}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,6)$.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογώνιων αξόνων Οxy, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1, r_2 , και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2, r_3 . Αν είναι

$r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$, όπου $E(\Delta_1)$ και $E(\Delta_2)$ είναι τα

εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ' Γυμνασίου

1. Αν $x + y = 3 \cdot (-2)^2$ και $y - w = \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:
 $A = 7x + 10y - 3w - 87$.

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Στο εσωτερικό της γωνίας A φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα. Αν $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$, $\hat{A\hat{E}D} = 60^\circ$ και το ύψος AH έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

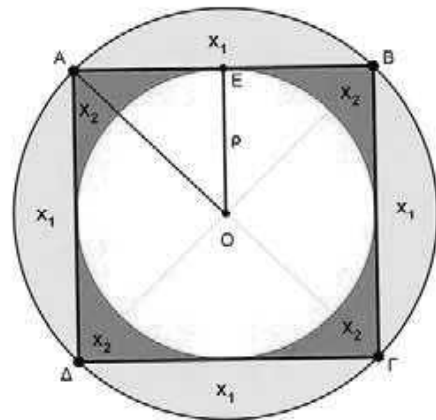
- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά 2ρ . Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(O, \rho A)$ που ορίζονται από τις χορδές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA . Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(O, \rho, OA)$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(O, \rho)$ και $C(O, \rho A)$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $E(X_1)$ και $E(X_2)$ των χωρίων X_1 και X_2 , αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O, x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O, \rho, OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
 72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 “Ο ΘΑΛΗΣ”
 19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

Πρόβλημα 3

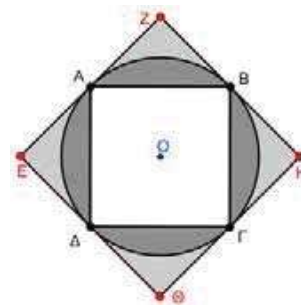
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $K(2, 8)$.

- (α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .
 (β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4, -4)$ και $M(-1, 2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(O, \rho)$ στα σημεία A, B, Γ και Δ .

- (α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.
 (β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου $EZH\Theta$ και εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$.
 (γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3,1415$).



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
 Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6},$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2

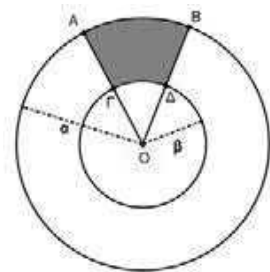
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x - 3) + 2(\alpha - 1).$$

Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν E του χωρίου $AB\Delta\Gamma$ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O, α) και (O, β) , $0 < \beta < \alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega = \angle A\hat{O}B$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3.$$



Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = \alpha$ cm και $AB < A\Delta$. Η κάθετη από την κορυφή B προς τη διαγώνιο $A\Gamma$ την τέμνει στο σημείο E . Αν ισχύει ότι $E\Gamma = 2 \cdot AE$, να βρείτε:

- (i) το μήκος της πλευράς AB .
- (ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi \chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2, -6)$. Το σημείο A ανήκει στον άξονα $\chi \chi$ και στην ευθεία (ε) , ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα $\psi \psi$ και στην ευθεία (ε) .

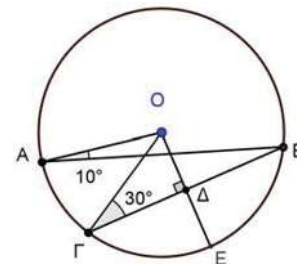
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM .

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο $c(O, R)$ (κέντρου O και ακτίνας R) δίνονται σημεία A , Γ και B τέτοια ώστε $\widehat{OAB} = 10^\circ$ και $\widehat{O\Gamma B} = 30^\circ$. Τα σημεία A και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία OB . Από το σημείο O φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓB που την τέμνει στο σημείο Δ , ενώ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο E .



(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\Gamma B}$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $OB\Gamma E$ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και του τετραπλεύρου $AB\Delta Z$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$.

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του. Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$, αν $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \frac{28}{\nu}$ και $\gamma = \frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και $\widehat{BAG} = \omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ, την πλευρά AG στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά AG τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\widehat{\Gamma\Lambda Z} = 36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

- (α) $\omega = 36^\circ$,
- (β) $AM = \Gamma Z$,
- (γ) $B\Lambda = \Lambda Z$.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = (x+y) \cdot z^m - w$.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
 77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
 12 Νοεμβρίου 2016

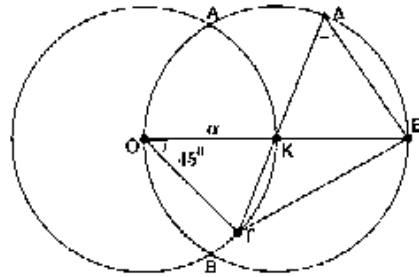
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Αν $\alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1}$ και $\beta = 10^{2v+1} : 100^v$, να βρείτε την αριθμητική

τιμή της παράστασης: $A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$.

Πρόβλημα 2.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $OK = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία O και K , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B . Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο KB και η ευθεία GK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας α στο σημείο Δ . Η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας α στο σημείο E . Αν είναι $\widehat{K\hat{O}\Gamma} = 45^\circ$, να βρείτε :



- (α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{K\hat{\Delta}E}$, και
 (β) το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma E$ συναρτήσει του α .

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a, b, c, d , ισχύει ότι: $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$.

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{A}{36}$, $\frac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να

βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a, b, c, d .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
 Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες